Devoirs

Mathématiques

Première S

Notice individuelle

Devoirs 1 à 8

Rédaction Sébastien Cario, Philippe Bardy,
Isabelle Tenaud

Coordination Jean-Michel Le Laouénan

Imprimé au Cned - Site de Rennes 7, rue du Clos Courtel 35050 Rennes Cedex 9

Devoirs

▸ 1 à 8

Devoir 1 à envoyer à la correction

Attention

- Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 01** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 01**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

- La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.
- Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 1.

Exercice 1 *(3 points)*

Pour cet exercice, on attachera beaucoup d'importance à la rédaction et aux justifications.

Vrai ou Faux ? Justifier.

Pour tout x réel,

❶ Si $x > 1$ alors $x^2 > 1$.

❷ Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$.

❸ Si $x^2 \leq 1$ alors $x \leq 1$.

❹ Si $x^2 > 1$ alors $|x| > 1$.

❺ Si $x \leq 6$ alors $\sqrt{x} \leq 2$.

❻ Si $x > -1$ alors $|x| > 1$.

Exercice 2 *(5 points)*

❶ Soit f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$.

a) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, $f(x) < 0$ (*on pourra utiliser le fait que la fonction racine carrée est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$).

b) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$.

c) En déduire que pour tout x de $[1;+\infty[$, $f(x) \geq -1$.

d) En déduire que pour tout x de $\left[1;+\infty\right[$, $\sqrt{x}-1 \leq \sqrt{x-1}$.

❷ *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\left|\sqrt{x}-1\right| \leq \sqrt{\left|x-1\right|}$.

Exercice 3 *(2 points)*

Soient f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4-2x+\left|x-3\right|-\left|x-5\right|$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

❶ Exprimer sans valeur absolue $f(x)$ en fonction de x pour tout x de :

a) $\left]-\infty\,;3\right]$;

b) $\left[3\,;5\right]$;

c) $\left[5\,;+\infty\right[$.

❷ Montrer que $I\left(4\,;-4\right)$ est centre de symétrie de C.

Exercice 4 *(10 points)*

On considère un parallélogramme ABCD, non aplati, E le milieu de [AD], F le point tel que $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, et K le quatrième sommet du parallélogramme EAFK.

On appelle M le milieu de [BE], et G le point tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Le but de l'exercice est de montrer d'une part que les points G, M, K et C sont alignés, d'autre part que les droites (BE) et (DF) se coupent en M.

Partie A - Calculs vectoriels

❶ Faire une figure.

❷ **a)** Montrer que $\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GF}$. En déduire que $\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GK}$ et que G, K et C sont alignés.

b) Montrer que $\overrightarrow{GK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$. En déduire que $\overrightarrow{GK}=2\overrightarrow{GM}$ et que G, M et K sont alignés.

c) En déduire que les points G, M, K et C sont alignés.

❸ Montrer que $\overrightarrow{FD}=4\overrightarrow{FM}$. En déduire que les droites (BE) et (DF) se coupent en M.

Partie B - Avec des coordonnées

❶ Pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base du plan ?

❷ Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, K et M dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

❸ Montrer que les points G, M, K et C sont alignés.

❹ Déterminer une équation de la droite (DF). En déduire que les droites (BE) et (DF) se coupent en M. ■

N'oubliez pas de joindre la notice individuelle que vous trouverez dans ce livret, avec le 1re devoir, pour le professeur-correcteur. Elle est également téléchargeable sur votre site de formation.

Devoir 2 à envoyer à la correction

Attention

▸ Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 02** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 02**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

▸ La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.

▸ Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 2.

Exercice 1 *(5 points)*

Le relevé des précipitations sur 12 mois dans les villes de Nice et Metz donne le tableau suivant où les précipitations sont exprimées en mm :

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Nice (en mm)	82,7	76,4	70,5	62,2	48,6	35,8	15,6	31,3	54,4	108,2	104,2	77,5
Metz (en mm)	63,5	57,7	63,1	53,5	68,9	72,0	61,5	62,5	60,2	63,5	66,6	73,0

❶ Déterminer la moyenne de précipitations à Nice, puis à Metz. Peut-on en déduire que le climat est semblable dans les deux villes ? Argumenter à l'aide des écarts types des deux séries.

❷ Déterminer, en expliquant les calculs ou les démarches, pour chaque série, l'étendue, la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3 , l'écart interquartile.

❸ Représenter les deux séries par deux diagrammes en boîte avec la même graduation.
Ces graphiques confirment-il la réponse du ❶ sur le climat des deux villes ?

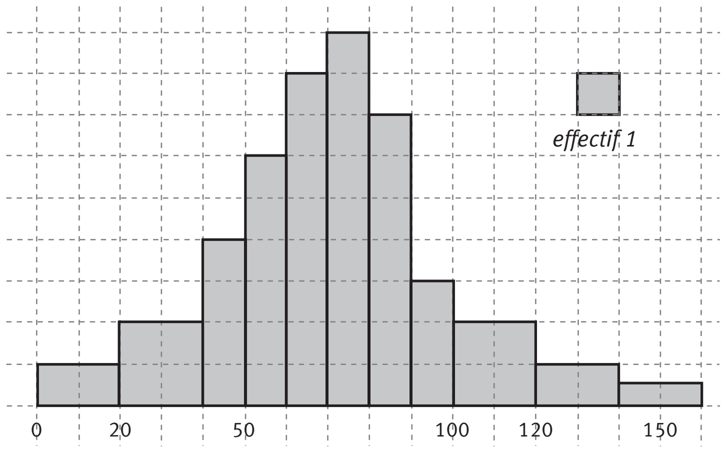
❹ Pour cultiver certains arbres, il faut qu'au moins 9 mois sur 12 il tombe au moins 60 mm d'eau.
Indiquer comment on peut se servir des diagrammes en boîte pour répondre à la question suivante : peut-on cultiver cet arbre à Nice, à Metz ?

Exercice 2 *(5 points)*

Une série statistique est donnée par l'histogramme suivant.

❶ Donner le tableau de la série avec les classes, les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.
❷ Quelle est la classe qui contient la médiane ? Celle qui contient le premier quartile ? Celle qui contient le troisième quartile ? Celle qui contient le premier décile ? Celle qui contient le neuvième décile ?

❸ Déterminer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type *s*.



Quelles sont les classes incluses dans l'intervalle $\left[\overline{x}-2s\ ;\ \overline{x}+2s\right]$?

La réunion de ces classes représente quel pourcentage de la population ?

Exercice 3 *(4 points)*

❶ Restitution organisée des connaissances
On suppose connues les propriétés suivantes.

- Pour tous réels *a*, *b* et *k*,

si $a<b$ alors $a+k<b+k$;

si $a<b$ alors $-a>-b$.

- La fonction inverse est strictement décroissante sur $\left]0\ ;+\infty\right[$.

Soit *f* une fonction à valeurs strictement positives, définie sur $\mathbb{R}$. On définit une autre fonction *g* sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-\dfrac{1}{f(x)}$.

a) Montrer que, si *f* est strictement croissante sur un intervalle I, alors *g* est strictement croissante sur I.

b) Montrer que, si *f* est strictement décroissante sur un intervalle I, alors *g* est strictement décroissante sur I.

❷ Soit *g* définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}$. On note *C* la courbe représentative de *g* dans un repère orthonormé $\left(0\ ;\vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

a) Dresser le tableau de variation de *g* sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout réel *x*, $0\leq g(x)\leq 1$.

c) Etudier les positions relatives de *C* et de la parabole d'équation : $y=x^2$.

Exercice 4 *(6 points)*

Dans un couple, le salaire mensuel de la femme est supérieur à celui de l'homme de 500 €. Le salaire de la femme augmente de 5 % et celui du mari de 15 %.

On note x le salaire mensuel de la femme (en euros) avant l'augmentation.

❶ Exprimer en fonction de x le salaire du mari avant augmentation, le salaire de la femme après augmentation et le salaire du mari après augmentation.

❷ On note $f(x)$ l'augmentation (en pourcentage) des revenus du couple.

a) Montrer que $f(1250)=8,75$.

b) Montrer que $f(x)=10-\dfrac{1250}{x-250}$.

❸ Dresser le tableau de variations de f sur $[500\,;+\infty[$.

❹ **a)** Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque le salaire de la femme est compris entre 800 et 1 500 €.

b) L'augmentation en pourcentage des revenus du couple peut-elle être supérieure à 11 % ? Si oui quelle est la plus petite valeur (entière) de x telle que : $f(x) \geq 11$?

c) L'augmentation en pourcentage des revenus du couple peut-elle être supérieure à 9,9 % ? Si oui quelle est la plus petite valeur (entière) de x telle que : $f(x) \geq 9,9$? ■

N'oubliez pas d'envoyer la notice individuelle si vous ne l'avez pas jointe avec le 1er devoir.

Devoir 3 à envoyer à la correction

Attention

- Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 03** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 03**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

- La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.
- Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 3.

Exercice 1 *(3 points)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

❶ $2x^2-5x-7=0$; $2x^2-5x-7\geq 0$.

❷ $4x^2-3x+1=0$; $4x^2-3x+1\leq 0$.

❸ $3x^2+30x+75=0$; $3x^2+30x+75\leq 0$.

Exercice 2 *(3 points)*

❶ Factoriser le trinôme $x^2-7x-18$.

❷ En déduire une factorisation du polynôme x^4-7x^2-18 ; puis résoudre $x^4-7x^2-18\leq 0$.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+x+5$.

❶ Donner le tableau de variation de la fonction f et construire sa représentation graphique qui sera nommée (P).

❷ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole (P) avec la droite (D) d'équation $y=x+1$. Compléter la figure.

❸ Soit m un nombre réel. On appelle (D_m) la droite de coefficient directeur m passant par le point A $(1\,;2)$.

Ecrire, en fonction de m, l'équation réduite de la droite (D_m).

Vérifier que la droite (D) est confondue avec la droite (D_1).

❹ Démontrer que les abscisses des points d'intersection de la parabole (P) avec la droite (D_m) vérifient l'équation $x^2+(m-1)x-m-3=0$.

En se référant au graphique, quelle propriété peut-on prévoir sur le signe du discriminant Δ_m de cette équation ? (On ne demande pas la démonstration).

❺ On considère un trinôme ax^2+bx+c possédant deux racines x_1 et x_2.
Exprimer la somme x_1+x_2 en fonction de b et de a.

En déduire la valeur de m pour que la droite (D_m) coupe la parabole (P) en deux points symétriques par rapport à A. Compléter la figure.

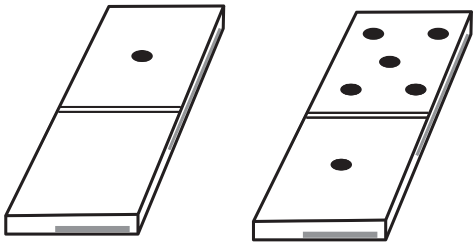
Exercice 4 *(4 points)*

Cet exercice est de la forme « exercice avec prise d'initiative ».

Un jeu de dominos est constitué de 28 rectangles constitués chacun de deux carrés sur lesquels des points indiquent les entiers : 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Il y a 7 doubles : « double 0 », « double 1 »,… « double 6 ».

Il y a 21 dominos où les nombres sont différents : « 0 et 1 », « 0 et 2 »,… « 5 et 6 ».


« 0 et 1 » « 1 et 5 »

Deux jeux sont proposés.

Premier jeu : on tire un domino au hasard et on gagne, en euros, la somme des entiers indiqués sur le domino.
Deuxième jeu : on tire un domino au hasard et on gagne, en euros, le double de l'écart entre les entiers indiqués sur le domino.

(L'écart entre deux nombres est égal à la différence positive : « le plus grand – le plus petit »).

On pourra représenter chaque domino par une case du tableau :

« et »	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Le joueur J choisit un des deux jeux pour faire ensuite un grand nombre de parties ; quel jeu doit-il choisir pour espérer avoir les meilleurs gains ?

Comment peut-on modifier simplement le deuxième jeu pour obtenir un troisième jeu globalement analogue au premier ?

Quelle mise peut-on alors demander au joueur pour chaque partie du premier jeu ou du troisième jeu, pour que chaque jeu soit équitable entre le joueur et l'organisateur ? (c'est-à-dire que le joueur ait un espoir de gain nul, mise comprise).

Si J recherche l'irrégularité des résultats, quel jeu doit-il choisir : le premier ou le troisième ?

Exercice 5 *(5 points)*

Dans un concours, une épreuve est formée de trois tests.

❶ Le premier test est formé par deux questions à choix multiples (QCM).

On note 1 point pour chaque réponse juste, –1 point pour chaque réponse fausse et on met 0 point aux questions sans réponse.

On notera J l'événement « le candidat répond juste à la question », E l'événement « le candidat fait une erreur » et N l'événement « le candidat ne répond pas à la question ».

On estime que la probabilité de répondre juste à une question est 0,5, de répondre par une erreur est 0,4 et de ne pas donner de réponse est 0,1.

Ces probabilités sont les mêmes pour les deux questions, on considèrera qu'il s'agit d'expériences répétées identiques et indépendantes.

On appelle X la note obtenue au premier test, c'est-à-dire le total des points obtenus à l'ensemble de ces deux questions. On définit ainsi une variable aléatoire.

Déterminer la loi de probabilité de X.

On appelle A l'événement « le candidat obtient une note positive (ou nulle) au premier test ».

Déterminer la probabilité de l'événement A.

❷ Les deuxième et troisième tests sont analogues au premier.

Il s'agit de la répétition d'expériences identiques et indépendantes.

Déterminer les probabilités des événements suivants (on donnera des valeurs approchées par défaut à 10^{-3} près) :

- B : « le candidat obtient une note positive (ou nulle) à chacun des trois tests ».
- F : « le candidat obtient une note strictement négative au premier test, des notes positives (ou nulles) aux deux autres tests ».
- G : « le candidat obtient une note strictement négative et deux notes positives (ou nulles) ».
- H : « le candidat obtient au plus une note strictement négative » (on exprimera H à l'aide de B et G).

■

Devoir 4 à envoyer à la correction

Attention

- Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 04** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 04**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

- La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.
- Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 4.

Exercice 1 *(5 points)*

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

❶ Les fonctions f_1, f_2, f_3 et g sont définies et dérivables sur $\left[0\,;+\infty\right[$ telles que

$f_1(x)=x^4+5x^3+2x+8,\ f_2(x)=\left(x^4+5x^3+2x+8\right)^2,\ f_3(x)=\dfrac{1}{x^4+5x^3+2x+8}$ et $g(x)=\dfrac{3x+11}{x^2+x+1}.$

Déterminer leurs fonctions dérivées (on mettra en évidence la démarche utilisée).

❷ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=0{,}5x^2-x-1{,}5$ et soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Représenter la courbe (C_h) et la tangente (T) à la courbe (C_h) au point d'abscisse 3.

b) Ecrire l'équation réduite de la tangente (T_a) à la courbe (C_h) au point d'abscisse a.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la tangente (T_a) passe par le point A de coordonnées $(-1\,;-2)$. Représenter ces tangentes.

c) Déterminer l'abscisse du point la courbe (C_h) où la tangente est parallèle à la droite (D) d'équation $y=-10x-2$.

Exercice 2 *(3 points)*

On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.

❶ On connaît la propriété : « si une fonction u est dérivable en a et si une fonction v est dérivable en a, alors la fonction produit uv est dérivable en a ».

La fonction f est donc dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$, déterminer $f'(x)$.

❷ En utilisant la définition, étudier la dérivabilité de f en 0.
Que montre cet exemple ? *Répondre en utilisant certaines des expressions suivantes* :
u dérivable en a, u non dérivable en a, v dérivable en a, v non dérivable en a, uv dérivable en a, uv non dérivable en a, quelque soit, il existe.
❸ Choisir les mots adaptés pour que la phrase suivante exprime ce qui vient d'être prouvé.

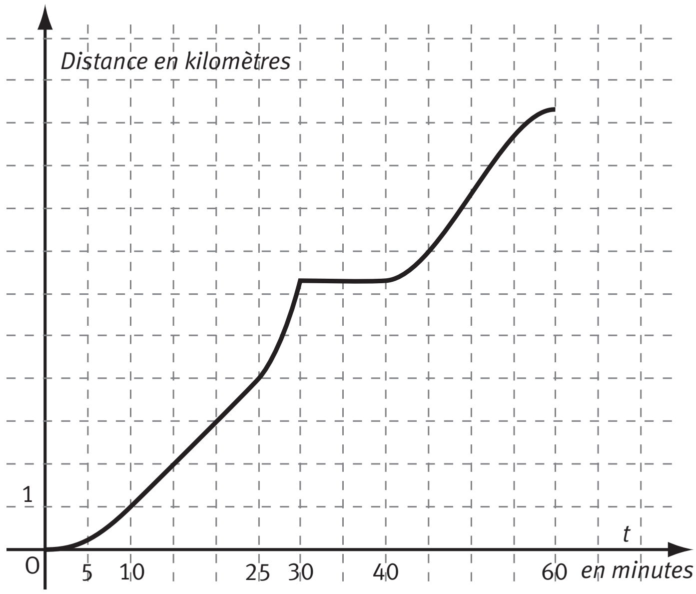
Le résultat de la question ❷ montre que la • réciproque / • contraposée de la propriété énoncée au ❶ est • vraie / • fausse.

Exercice 3 *(4 points)*

On a représenté graphiquement la distance parcourue par un cycliste pendant une promenade d'une heure. Les distances sont mesurées en kilomètres, les durées en minutes.

On note $d(t)$ la distance parcourue entre le départ et l'instant t, et on appelle $v(t)$ la vitesse instantanée à l'instant t, exprimée en km.min^{-1}.

❶ Rappeler la définition de la vitesse instantanée et comment on peut lire sur le graphique cette vitesse instantanée à un instant t. Déterminer graphiquement, $v(0)$ et $v(20)$.



❷ Le cycliste part à 8 h. Décrire sa vitesse de façon qualitative (vitesse nulle, augmentation, diminution…) :

- Entre 8 h et 8 h 10,
- Entre 8 h 10 et 8h 25,
- Entre 8 h 25 et 8h 30,
- Entre 8 h 30 et 8 h 40,
- Entre 8 h 40 et 9 h.

❸ Qu'a-t-il pu se passer à 8 h 30 ?

❹ Sur l'intervalle $[40\,;60]$, les distances parcourues sont telles que :
$d(t) = -0{,}001t^3 + 0{,}15t^2 - 7{,}2t + 118{,}33$.

Donner l'expression de $v(t)$ et calculer $v(40)$, $v(50)$ et $v(60)$.

Exercice 4 *(8 points)*

Les quatre questions sont indépendantes.

❶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin^2(x)=\dfrac{3}{4}$.

❷ **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2=1{,}5x+1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\sin^2(x)=3\sin(x)+2$.

❸ **a)** A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α tel que :

$\cos(\alpha)=0{,}8$ et $\alpha\in\left]-\pi\,;0\right]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5\sin^2(x)+8\cos(x)=5\cos^2(x)+5$. Si nécessaire, on exprimera les solutions en fonction de α.

c) Représenter les solutions de l'équation précédente sur un cercle trigonométrique.

❹ On considère l'équation : $\cos(2x)=\sin(x)$.

a) Montrer que cette équation est équivalente à : $2x=\dfrac{\pi}{2}-x+2k\pi$ ou $2x=-\dfrac{\pi}{2}+x+2k\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $\cos(2x)=\sin(x)$. ■

Devoir 5 à envoyer à la correction

Attention

- Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 05** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 05**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

- La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.
- Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 1.

Exercice 1 *(5 points)*

On considère un triangle ABC rectangle en A, I le milieu de [BC], H le projeté orthogonal de A sur (BC), P celui de H sur (AB) et Q celui de H sur (AC).

On veut démontrer que (AI) est perpendiculaire à (QP).

❶ Première méthode.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=AH^2$. En déduire une comparaison des produits scalaires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

c) Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{PQ}$. Conclure.

❷ Deuxième méthode.

On pose $AB=b$ et $AC=c$. On considère le repère orthonormé $\left(A\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens, et $\vec{j}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens.

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et I dans le repère $\left(A\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) Déterminer une équation de la droite (BC). En déduire que les coordonnées du point H sont : $x_H=\dfrac{bc^2}{b^2+c^2}$ et $y_H=\dfrac{b^2c}{b^2+c^2}$.

c) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{AI}$. Conclure.

Exercice 2 *(3 points)*

Dans cet exercice toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère un triangle ABC isocèle en A et tel que $BC = AH = 2$, H étant le projeté orthogonal de A sur (BC).

Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$.

Montrer que K est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 3 *(5 points)*

Partie A

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$;
- $v_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

❶ Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.

❷ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 5 cm), faire apparaître les premiers termes de (v_n) sur un graphique en traçant la courbe C d'équation $y = \frac{x}{x+1}$ pour $x > 0$ et la droite D d'équation $y = x$.

On admet que tous les termes de la suite (v_n) sont positifs.

❸ Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

❹ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont égales.

Partie B

Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il un réel a tel que la suite (w_n) définie par $w_0 = a$ et $w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n + 1}$ vérifie $w_{11} = \frac{1}{11}$?

Exercice 4 *(7 points)*

L'équipe A et l'équipe B s'affrontent au jeu de Débaras-Ball.

Ce jeu se pratique sur un terrain rectangulaire partagé par un filet en deux camps : celui de l'équipe A et celui de l'équipe B. Les équipes jouent à tour de rôle.

Les règles du jeu sont les suivantes.

- Au départ 180 balles sont dans le camp A et 40 balles dans le camp B.

- Au 1er signal, les joueurs de l'équipe A lancent le plus possible de balles de leur camp dans le camp adverse (les joueurs de l'équipe B ne font donc rien) ;
- Au 2e signal au bout de 30s, les joueurs de l'équipe A s'arrêtent et les joueurs de l'équipe B lancent les balles de leur camp dans le camp adverse. Ils s'arrêtent 30s plus tard au 3ème signal.
- Au 3e signal, les joueurs de l'équipe A lancent des balles de leur camp dans le camp adverse …
- Au bout de 10 minutes, tout le monde s'arrête et on compte le nombre de balles de chaque camp.

L'équipe qui a le moins de balles dans son camp gagne la partie.

On note a_n (resp. b_n) le nombre de balles présentes dans le camp A (resp. B) n minutes après le commencement de la partie. Pour la modélisation de cette situation que l'on considèrera, les nombres a_n et b_n ne seront pas forcément entiers.

On a donc : $a_0 = 180$ et $b_0 = 40$.

On suppose que l'équipe A arrive à se débarrasser de 60% des balles présentes dans son camp en 30s et que l'équipe B se débarrasse de 30% des balles de son camp en 30s.

Partie A

❶ Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

❷ Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}58a_n + 0{,}3b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}42a_n + 0{,}7b_n$.

❸ A l'aide d'un tableur, déterminer a_{10} et b_{10}. Conclure quant au vainqueur de la partie.

❹ L'année suivante, l'équipe A a gardé son niveau, l'équipe B s'est améliorée et renvoie en 30s 40% des balles qui sont dans son camp, et les deux équipes s'affrontent dans les mêmes conditions que précédemment. Quelle est l'équipe gagnante ?

Partie B

❶ On considère la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_n = 7a_n - 5b_n$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1er terme.

❷ Exprimer u_n en fonction de n.

❸ Expliquer pourquoi, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n + b_n = 220$.

❹ En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n. ■

Devoir 6 à envoyer à la correction

Attention

- Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 06** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 06**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

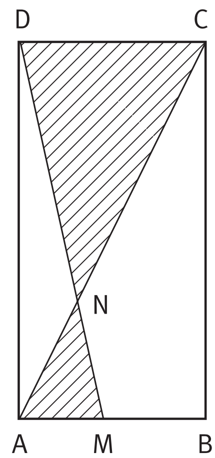
- La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.
- Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 2.

Exercice 1 *(5 points)*

Le rectangle ABCD est tel que $AB = 1$ et $AD = 2$. Le point M est sur le segment [AB] et on pose $AM = k$.

Les droites (AC) et (MD) se coupent au point N

On appelle $S(k)$ la somme des aires des triangles AMN et DCN.



❶ Déterminer $S(0)$ et $S(1)$.

❷ Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$, déterminer les équations réduites des droites (AC) et (MD) et en déduire les coordonnées du point N en fonction de k.

❸ Montre que $S(k) = \dfrac{k^2+1}{k+1}$.

❹ Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

❺ En déduire la valeur de k pour laquelle l'aire hachurée est minimale.

Exercice 2 *(5 points)*

Une entreprise fabrique q objets par jour, q étant un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,250]$.

Le coût total de fabrication de ces q objets est $C_T(q)$ en euros, la fonction C_T étant dérivable sur $[0\,;\,250]$.

❶ Soit $C_{Moy}(q) = \dfrac{C_T(q)}{q}$ le coût moyen de fabrication d'un objet en euros. En supposant que la fonction C_{Moy} admet un minimum pour une valeur q_0 de l'intervalle $]0\,;\,250[$, montrer que la tangente (T) au point d'abscisse q_0 à la courbe représentative de la fonction C_T passe par l'origine.

❷ Le coût marginal $C_{mar}(q)$ est le coût de fabrication d'un $q+1^{ème}$ objet supplémentaire, soit $C_T(q+1)-C_T(q)$. Quand q est grand (c'est le cas ici), on juge que 1 est « petit » et on préfère remplacer la différence précédente (où $h=1$) par sa limite quand h tend vers 0, soit $C_{mar}(q)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C_T(q+h)-C_T(q)}{h}=C_T^{'}(q)$. Démontrer que, lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.

❸ Soit $R(q)$ la recette obtenue pour q objets vendus. Le bénéfice est donc $B(q)=R(q)-C_T(q)$.

Les fonctions R et C_T sont représentées dans un repère orthogonal.

En montrant comment vous utilisez le graphique donné **en annexe** et **que vous joindrez** à votre copie, lire les valeurs de q pour lesquelles le bénéfice est nul, les valeurs de q pour lesquelles il est positif, la valeur de q pour laquelle il atteint son maximum, la valeur pour laquelle le coût moyen est minimal.

❹ Retrouver ces résultats par le calcul sachant que :

• le coût total est $C_T(q)=0{,}002q^3-0{,}6q^2+70q$ en euros,

• chaque objet est vendu 40 €, donc, en supposant que tout soit vendu, on obtient la recette $R(q)=40q$.

Exercice 3 *(3 points)*

Cet exercice est de la forme « exercice avec prise d'initiative ».
Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

❶ La somme de deux nombres réels positifs est égale à 7.

Pour quelles valeurs de ces deux nombres leur produit est-il maximum ?

❷ Même question, la somme des deux nombres étant fixe et égale à A.

❸ Le produit de deux nombres réels strictement positifs est égal à une constante, notée B.

Pour quelles valeurs de ces deux nombres leur somme est-elle minimale ?

Exercice 4 *(3 points)*

On lance 5 fois de suite une pièce déséquilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est égale à 0,4.

Soit k le nombre de fois où on a obtenu Pile. Si k est impair on gagne k €. Sinon on perd 3 €.

Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 5 *(4 points)*

Dans un lieu de vacances, deux cyclistes ont le choix entre cinq itinéraires balisés : b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5.

Chaque jour, chaque cycliste choisit au hasard, indépendamment de l'autre cycliste, un des cinq itinéraires.

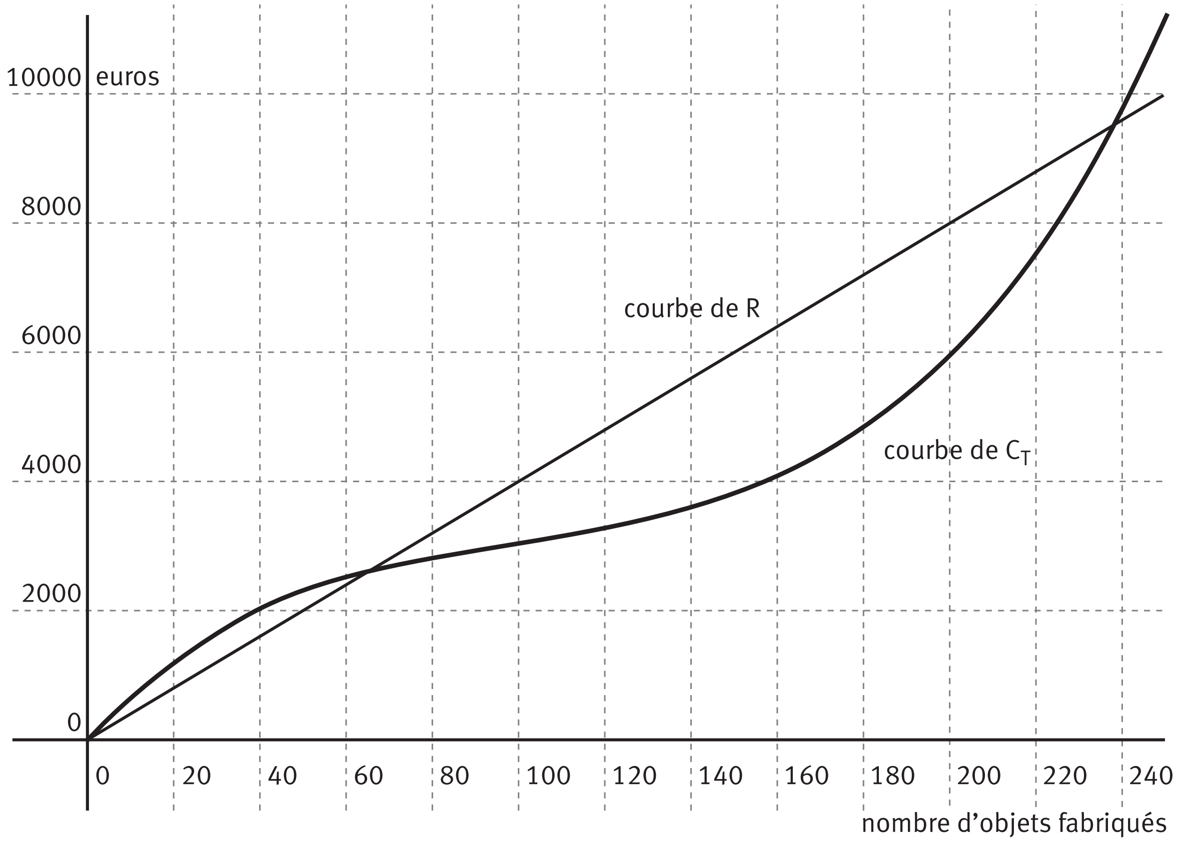
❶ Quelle est la probabilité qu'ils choisissent le même itinéraire ?

❷ Le séjour dure 6 jours, chaque jour les choix se font au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils se trouvent exactement deux fois sur le même itinéraire ?

❸ Le séjour dure n jours. Quelle est, en fonction de n, la probabilité qu'ils ne se trouvent jamais sur le même itinéraire ?

❹ Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité que les deux cyclistes se trouvent au moins une fois sur le même itinéraire est supérieure à 0,9.

Annexe pour l'exercice 2



Devoir 7 à envoyer à la correction

Attention

- Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 07** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 07**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

- La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.
- Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 3.

Exercice 1 *(5 points)*

❶ En utilisant les formules de duplication, montrer que, pour tout réel a on a :

$$\cos(4a) = 8\cos^4(a) - 8\cos^2(a) + 1.$$

❷ En déduire que le nombre $x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est une solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + 0{,}5 = 0$.

❸ Résoudre l'équation $8x^4 - 8x^2 + 0{,}5 = 0$.

❹ **a)** Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près des solutions trouvées à la question précédente.

b) Expliquer comment on peut déterminer laquelle de ces solutions est $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

c) Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 *(3 points)*

On souhaite construire un parallélogramme ABCD dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle : $AC = 7$, $BD = \sqrt{19}$ et $\widehat{BAD} = 60°$.

On pose $AB = x$ et $AD = y$.

❶ A l'aide du théorème de la médiane, démontrer que : $x^2 + y^2 = 34$.

❷ A l'aide de la relation d'Al Kashi, démontrer que : $x^2 + y^2 - xy = 19$.

❸ En déduire les dimensions du parallélogramme et en donner une méthode de construction.

Exercice 3 *(5 points)*

Dans un repère orthonormé, soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$.

Soit A le point de coordonnées (3 ; 0).

Soit M un point d'abscisse x situé sur la parabole (P).

1. Déterminer la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ telle que $AM = \sqrt{u(x)}$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $u'(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x.
3. Etudier les variations de la fonction u et en déduire les coordonnées du point B tel que la distance AM soit minimale lorsque $M = B$.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la parabole (P) au point B.
   Soit C le point d'intersection de la tangente (T) avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point C.
5. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

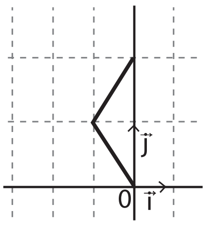
Exercice 4 *(7 points)*

Une puce se déplace dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ de la façon suivante.

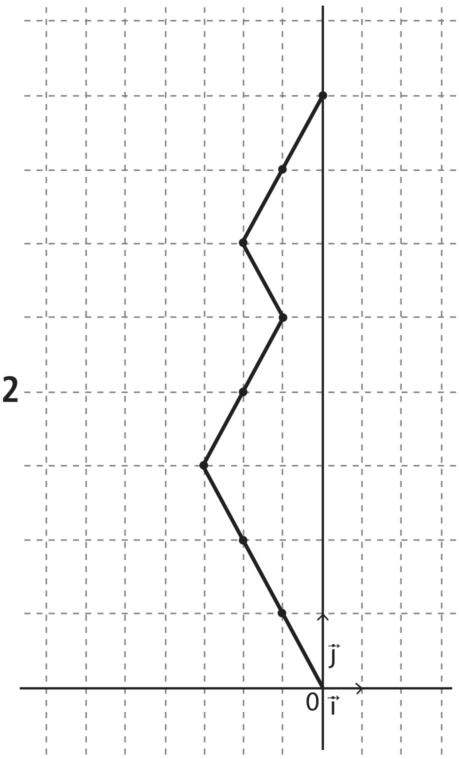
- à l'instant $t = 0$ s, la puce est en O ;
- la puce se déplace chaque seconde de façon aléatoire soit de 1 carreau vers la droite et un carreau vers le haut, soit de 1 carreau vers la gauche et de 1 carreau vers le haut ;
- la puce s'arrête lorsqu'elle est revenue sur l'axe des ordonnées.

Exemples de voyages de la puce

Voyage 1

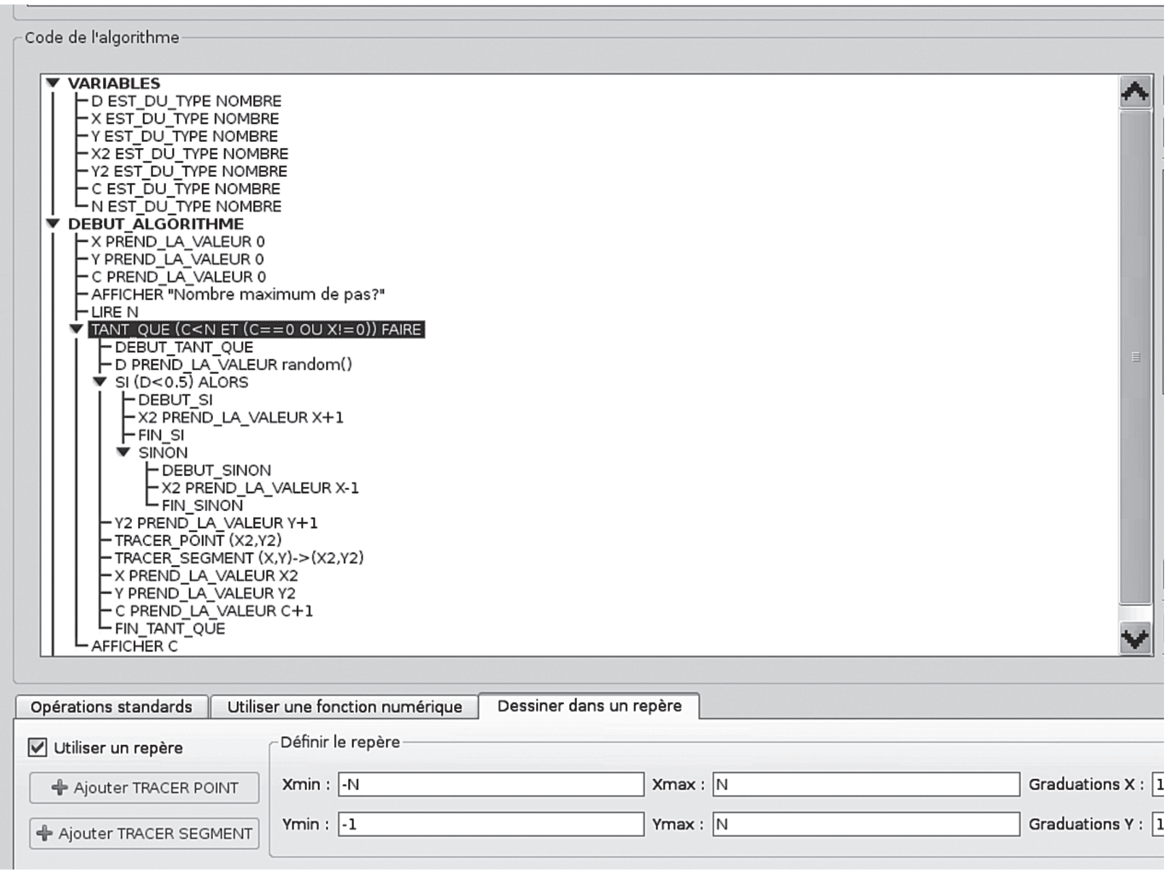


Voyage 2



Partie A *Simulation*

Dans un 1[er] temps, on se limite à un maximum de *N* déplacements de la puce.
On admet que l'algorithme *Algobox* ci-dessous répond au problème.



❶ Expliquer la condition $C<N$ et $\left(C=0 \text{ ou } X \neq 0\right)$ de réalisation de la boucle *Tant que*.
❷ Comment simule-t-on un des déplacements aléatoires de la puce ? Expliquer.
❸ Programmer cet algorithme, l'instrumenter.
❹ On suppose que $N=8$. A partir de cet algorithme, construire un autre algorithme, permettant de simuler 1000 voyages de la puce et de calculer la moyenne des nombres de déplacements de ces différents voyages (*pour ce nouvel algorithme, on ne cherchera pas à représenter les différents voyages).*
❺ Proposer une valeur pour le nombre moyen de déplacements du voyage de la puce.

Partie B *Modélisation*

On suppose toujours que le nombre de déplacements est limité à 8. Chaque voyage de la puce peut être décrit par une liste de –1 et de 1 de longueur au plus N : un –1 correspondant à un déplacement à gauche et 1 à un déplacement à droite.
Par exemple, le voyage 1 peut être décrit par (–1 ; 1) et le voyage 2 par (–1 ; –1 ; –1 ; 1 ; 1 ; –1 ; 1 ; 1).
De plus, si la puce a réussi à regagner l'axe des ordonnées, la somme de tous les termes de la suite est nulle.
On note D la variable aléatoire donnant le nombre de déplacements du voyage.

❶ Montrer que D peut prendre les valeurs 2, 4, 6 et 8.

❷ Déterminer $P(\mathrm{D}=2)$ puis $P(\mathrm{D}=4)$ (*on pourra s'aider d'un arbre).*

❸ Montrer que $P(\mathrm{D}=6)=\dfrac{1}{16}$. En déduire $P(\mathrm{D}=8)$.

❹ Déterminer $\mathrm{E}(\mathrm{D})$. Comparer avec les résultats de la partie I. ■

Devoir 8 à envoyer à la correction

Attention

- Collez l'étiquette codée **MA12 – DEVOIR 08** sur la 1re page de votre devoir. Si vous ne l'avez pas reçue, écrivez le code **MA12 – DEVOIR 08**, ainsi que vos nom et prénom.

Important

- La saisie informatisée des devoirs ne permet aucune erreur de code.
- Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 4.

Exercice 1 (6 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 0$ et de raison $\frac{3}{11}$.

❶ Calculer u_1, u_2 et u_3 (*on écrira ces nombres sous forme de fractions irréductibles puis on donnera des valeurs approchées par défaut à* 10^{-6} *près*).

❷ Exprimer u_n en fonction de n.

❸ Donner l'écriture fractionnaire de u_{36}. En donner une valeur approchée à 10^{-6} près.

Partie B

Soit (v_n) la suite géométrique de 1er terme $v_1 = 0{,}63$ et de raison 0,01.

❶ Calculer v_2 et v_3 puis $v_1 + v_2 + v_3$ (*on donnera des valeurs approchées par défaut à* 10^{-6} *près*).

❷ On appelle S_n la somme $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que : $S_n = \frac{63}{99}\left[1 - 0{,}01^n\right]$.

Donner un argument prouvant que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$.

❸ *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

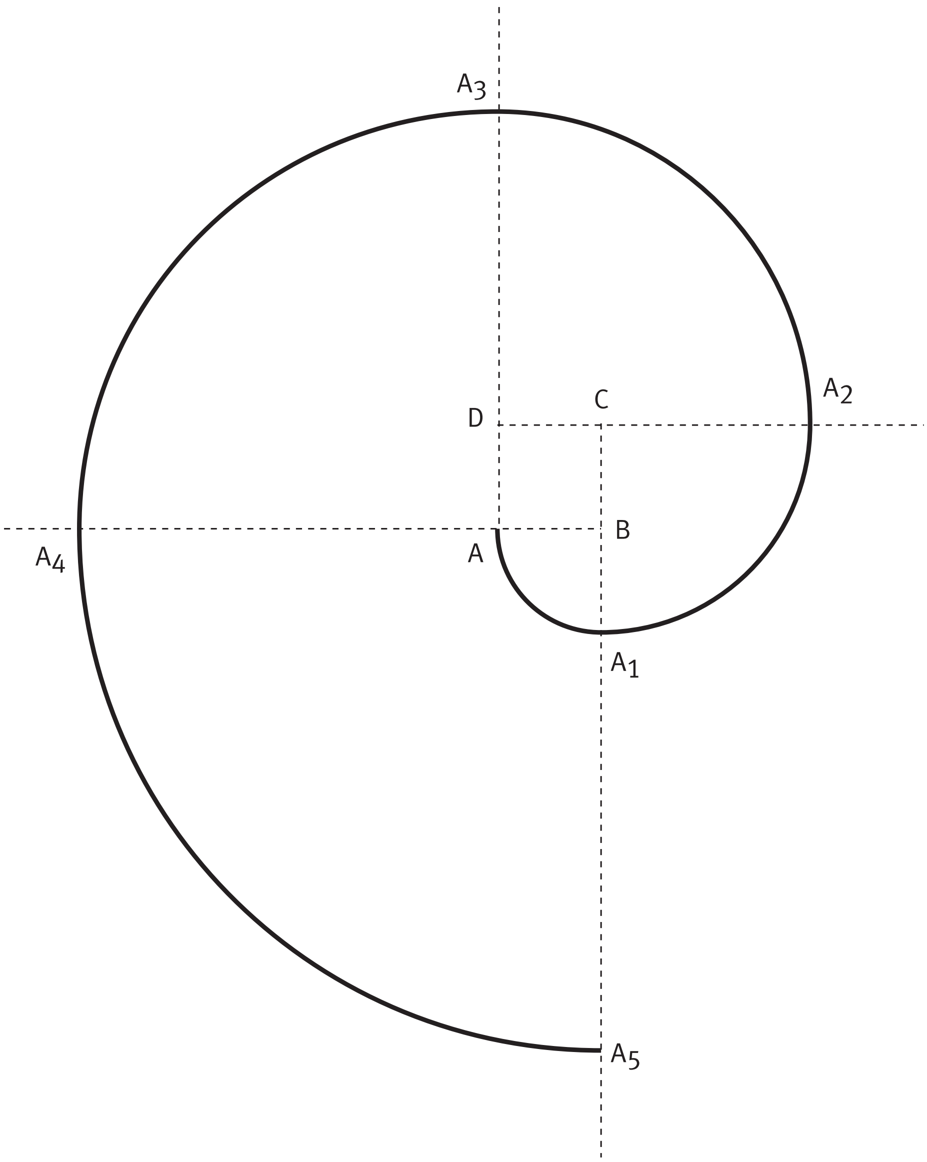
On note $S = \frac{7}{11}$. Existe-t-il un terme de la suite (u_n) qui a la même partie décimale que S (c'est-à-dire tel que $S - u_n$ est entier) ?

Exercice 2 *(4 points)*

Sur la figure, ABCD est un carré de côté 1. Le quart de cercle $\overset{\frown}{AA_1}$ a pour centre B, le suivant a pour centre C et ainsi de suite. On note u_n la longueur de l'arc $\overset{\frown}{A_nA_{n-1}}$; la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AA_1}$ est u_0.

❶ Montrer que la suite (u_n) est arithmétique et préciser sa raison.

❷ Calculer la longueur de la spirale $AA_1A_2......A_{20}$.



Exercice 3 *(5 points)*

Le nombre q est un nombre réel positif.

Alice lance une pièce bien équilibrée jusqu'au moment où elle obtient Pile pour la première fois.

Règle : Bob donne à Alice q^k € si c'est au $k^{\text{ième}}$ lancer qu'Alice a obtenu Pile pour la première fois et le jeu s'arrête.

❶ $q=2$

a) Un jeu est limité à une série de 5 lancers maximum, c'est-à-dire que le jeu s'arrête dès qu'Alice obtient Pile ou si Alice obtient cinq fois Face, et dans ce cas Alice ne reçoit rien.

Avant de commencer à jouer, quelle somme (la mise) Alice devrait-elle donner à Bob pour que le jeu soit équitable ?

b) Maintenant le jeu est une série de n lancers et Alice accepte de miser de 100€. Pour quelle valeur de n le jeu est-il équitable ?

c) Même question dans le cas où Alice accepte de miser 1000€, puis 10000€.

d) Dans le cas où le nombre de parties d'un jeu n'est pas limité, que pensez-vous de la mise ?

❷ Maintenant $q=1{,}9$.

a) Un jeu est limité à une série de 10 lancers.

Avant de commencer à jouer, quelle mise Alice devrait-elle donner à Bob pour que le jeu soit équitable ?

b) Maintenant le jeu est une série de n lancers et Alice accepte de miser de 15 €. Quelle est la plus grande valeur n_0 pour laquelle le jeu est favorable à Bob ?

c) Même question dans le cas où Alice accepte de miser 18 €.

d) Dans le cas où le nombre de parties d'un jeu n'est pas limité, que pensez-vous de la mise ?

Exercice 4 *(5 points)*

En 1964, des lois furent promulguées aux Etats-Unis afin de lutter contre les discriminations dont étaient victimes les minorités ethniques.

Le gouvernement américain attaqua en justice le réseau d'établissements scolaires de Hazelwood Indépendant School District (situé dans le comté de Saint Louis) car, parmi les 405 enseignants recrutés lors des années 1972 à 1974, il n'y avait eu que 15 enseignants noirs recrutés alors que dans l'ensemble du comté le taux d'enseignants noirs recrutés durant la même période avait été de 15,4%.

❶ Expliquer pourquoi on peut simuler la désignation d'un enseignant dans le réseau d'établissements de Hazelwood sur un tableur à l'aide de la formule =ENT(ALEA()+0,154) ou sur une calculatrice à l'aide de la formule Int(rand()+0,154) ou Ent(NbrAlea+0,154).

❷ Ecrire un algorithme et un programme pour que la calculatrice affiche le nombre d'enseignants noirs recrutés pour une simulation du recrutement de 405 enseignants. Modifier ce programme pour que la calculatrice affiche le nombre moyen d'enseignants noirs recrutés pour 20 simulations du recrutement de 405 enseignants. Faire fonctionner ce programme (attention, l'exécution de ce programme peut être assez longue), qu'observez-vous ?

❸ Peut-on utiliser la formule $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ pour obtenir l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% des échantillons du recrutement des 405 enseignants ?

Utiliser une loi binomiale et votre calculatrice ou un tableur pour obtenir l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%. Que pouvez-vous en conclure ?

❹ Pour réfuter la thèse de discrimination, les avocats d'Hazelwood ont contesté la pertinence des chiffres cités par l'accusation. Le taux d'enseignants noirs recrutés dans ce comté était, selon eux, faussé par les modalités particulières de recrutement dans la ville même de Saint Louis. En effet, durant cette même période, une politique dite de discrimination positive visait à essayer de recruter 50% de noirs parmi les nouveaux enseignants dans la ville de Saint-Louis. Ainsi, en ne prenant en compte que les enseignants noirs recrutés dans le comté de Saint Louis en dehors de la ville de Saint Louis, ce taux n'était plus que de 5,7%.

L'utilisation de cette nouvelle proportion pour déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% change-t-elle la conclusion faite au ❸ ? ■